HISTORIA ESQUEMATICA DE LOS CONCEPTOS DE FINITO E INFINITO

JUAN DAVID GARCIA BACCA

El Dr. Juan David García Bacca, nacionalizado venezolano, nació en Pamplona, España, en 1901. Profesor de Introducción a la Filosofía, en la Universidad de Santiago de Compostela. Durante 1933-37 profesor de Filosofía de las Ciencias y de Lógica Matemática en la Universidad de Barcelona. Profesor de Filosofía en las Universidades de Quito (1938-42) y México (1942-47); en la Universidad Central de Venezuela (1946-1972). Ha sido decano de la Facultad de Humanidades y Educación de esta última Universidad, así como director del Instituto de Filosofía. Doctor **honoris causa** de la Universidad Central de Venezuela y de la Universidad de San Marcos, Lima (Perú). Miembro de importantes Academias y sociedades culturales en Venezuela, España, México, Italia, Estados Unidos, Francia, Argentina, Bolivia, Brasil, Alemania, etc.

JUAN DAVID GARCIA BACCA

HISTORIA ESQUEMATICA DE LOS CONCEPTOS DE FINITO E INFINITO

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

PLAN GENERAL

Voy a dividir la historia de las relaciones entre los conceptos de *finito* e *infinito* en cuatro períodos:

Primer período: predominio y valoración positiva de lo finito sobre lo infinito. *Epoca griega,* en conjunto.

Segundo período: predominio y valoración de lo infinito sobre lo finito. *Epoca escolástica medieval.*

Tercer período: equivalencia de valor entre finito e infinito. *Epoca de constitución y desarrollo de la filosofía y matemáticas modernas.*

Cuarto período: predominio de lo finito, con imposibilidad de lo infinito absoluto. *Ontología y lógica contemporáneas; direcciones físicas contemporáneas.*

Como se trata, según el plan que nos hemos propuesto, de una exposición esquemática, nos reduciremos casi a alusiones y evitaremos en lo posible las citas literales.

PRIMER PERÍODO

PREDOMINIO Y VALORACION DE LO FINITO SOBRE LO INFINITO

Recordemos los datos siguientes: 1) En la única palabra griega de "ápeiron" fundió o confundió el griego clásico espontáneamente, sin premeditación, por virtud de su tipo de vida, las significaciones de *infinito* e *indeterminado*. E inversamente: en la palabra finito (*peperasménon*), fundió o confundió, correlativamente las significaciones de nuestras dos: *"definido y definitivo"*. Además el griego clásico *valoró* positivamente los conceptos de definido y definitivo, incluidos en el término de *finito;* al ser *finito* vinculó el valor de *perfecto;* el término *télos* significa paralela y simultáneamente: terminado y perfecto, es decir: finito, y 2) Además de esta indicación filológica recordemos otras de otros órdenes (2. II). El griego clásico no aplicó a la divinidad el atributo de "infinito". Expresamente atribuido a Jenófanes hallamos el texto: *que Dios no es infinito ni finito* (A, 28, edic. DielzKrantz, 5 a. I 117; 977 b 3) 31 (I 122 2); aunque en otra referencia a él se dice *"omne quod est infinitum deum esse voluit"* (A 34 I 123, 13): *quiso que*

todo lo infinito fuera Dios. Así que estos dos textos, referencias, no fragmentos, se destruyen mutuamente, aparte de que no se precisa ni desvincula la doble significación, posterior, de infinito e indefinido.

Ni Platón ni Aristóteles atribuirán al absoluto, incondicionado, primer motor... el atributo de infinidad.

Pero vale la inversa: todos los privilegios se otorgarán a lo *finito,* y sobre todo a lo finito que lo sea *definidamente* por definición y *definitivamente tal.*

2. 12) En efecto: notemos la fijación de límites en Platón. Entre la materia básica del universo y la Idea de Bien se dan únicamente los tipos de ser: *eídolon* (ideílla, imitación de eidos), *eidos;* 2 tipos en total. Dentro del orbe noético: los eidos terminan en un *átomon eidon,* o idea concreta indivisible ya, última, que cierra por abajo el orbe de los eidos. Por arriba, como principio sin ulteriores presupuestos o fundamento, está la *Idea del Bien.* El universo de los entes está, pues, definitivamente cerrado por dos tipos: *materia* e *Idea.* El proceso dialéctico no tiene que hacer sino tres pasos: ascender de los *eidola* o imitaciones de eidos a los eidos mismos (I), ascender del *átomon eidos* o eidos indivisibles (individualidades eidéticas) a los eidos más comprensivos (recuérdese el *Sofista* y el *Filebo*) (II), para llegar por fin a la *Idea de Bien,* a *anypótheton.* El proceso dialéctico es, pues, finito: en el sentido de definido, determina-

do, cerrado entre límites propiamente tales y no solamente de *hecho* tales.

Aunque no formando *un* todo y dando *un* ser con unidad positiva, y menos con unidad esencial (*ousía*), Platón no admite sino cuatro causas: material (la materia básica del universo, animada de un movimiento sísmico que impide la constitución en firme de seres sensibles, Cf. *Timeo*), la formal (imitaciones, semejanzas, reflejos, sombras que los eidos dan en lo sensible, sin llegar a ser formas de él), la formal subsistente o eidos en sí; la eficiente, reducida al Demiurgo que hace que lo sensible imite a lo inteligible; y la final última que es la Idea del Bien. Es decir: el orden de las causas es finito en número, predominando la causa final.

En la constitución del ser típico más al alcance de la experiencia inmediata, que somos nosotros, no admite Platón sino materia y tres partes del alma: apetitiva (*epithymía*), anímica, (ánimos, thymós), noética (*nous*), dominada cada parte por una virtud, cada parte del alma con su destino social o clase social propia, y según el predominio de una parte sobre otra tres tipos de pueblos con sus correspondientes vocaciones históricas. Y para que este número de tres no sea sólo de hecho finito sino que con él quede definido el hombre (su alma), la sociedad y su estructura, la moral y sus virtudes, los pueblos y sus vocaciones, establecerá, como virtud definitiva en un todo de todas las partes, la *justicia*. De nuevo finitud definitiva y definible.

En el orden de los bienes y valores, fundidos o confundidos aún en uno, hallamos como ápice supremo la *mesura* (metron); siguen, por su orden, los de simetría, belleza, perfección, suficiencia; inteligencia poética y sentido práctico (*phrónesis*); ciencia, técnicas y opiniones correctas (placeres puros: y como dice allí mismo Platón (*Filebo*, 66 C) *en el número seis hay que dar por terminado el canto, si se quiere que sea bello y bien ordenado* (que forme un *cosmos*).

No es menester recordar el número finito de los elementos, cuatro; pero sí es conveniente no dejar de recordar que entre ellos rige una ley matemática sencilla que vincula dos extremos (dos de ellos) con un intermedio: $M^2 = p. q.$, y que queda comprendida entre dos extremos absolutos: tierra y fuego (*Timeo*).

De modo que si partes del universo, como el hombre, no consta que sean definitivamente, esencialmente finitas, más aún: parece que nada puede ser definidamente nada, puesto que lo sensible tiene que ser imagen de lo inteligible, y lo inteligible concreto del orbe de los eidos tiene que ser, a su vez, *epíbasis y hormé,* escalones e impulsos hacia la Idea de Bien; sin embargo, cada ser está comprendido entre límites determinados; y todos entre la materia o espacio básico y la Idea del Bien. Límites absolutos ya e infranqueables.

El finitismo se acentúa más aún en Aristóteles: 2.13) predominio de la definición definitiva de las cosas, que tienen ya dentro, y por esencia y

nacimiento, sus propios límites: género próximo y diferencia específica; la lógica, el logos de las cosas, es, pues, ya esencialmente finito. Y el proceso de definir es el lógicamente valioso: 2.14). A la definición corresponde la *esencia* o qué es la cosa, que estará internamente constituida por dos causas, ni más ni menos: material y formal, de modo que cuando la materia llega estar en estado final no solamente es acto o está en acto (*enérgueia*), sino que ha llegado a su fin intrínseco, es *enteléquia* (*en, telos*). Y cuando se trata de un ser natural (*physikón*) tendrá intrínsecas las cuatro causas: material, formal, eficiente y final. Queda, pues, cerrado, delimitado, definido por sí, en sí mismo. Y bien sabido es que el ser natural fue el modelo de ser aristotélico. 2.15). Las figuras deductivas perfectas serán aquellas que incluyan, en cierto orden y con ciertas propiedades, un término medio o cerrado por dos extremos. Finitud deductiva.

2.16) Aristóteles tendrá siempre por inadmisible *un paso al infinito,* (*eìs ápeiron iénai*). (Metafís. 994 a 3,8,20; b 4; 1000 b 28; 1006 a 9; 1010 a 12; b 22; 1022 b 9, 1030 b 35. 1032 a 3; 1033 b 4; 1041 b 22; 1070 a 2, etc.).

Y tropezar con un proceso que lleve al infinito estará automáticamente prohibido. Es que confundía paso al infinito con paso a lo indeterminado. Así estarán prohibidos pasos al infinito en todos los órdenes de causas, en las definiciones, etc. Será preciso llegar hasta Newton y Leibniz, y aún más adelante, para que se introduzca en matemáticas

modernas, y las constituya, la operación "paso al límite" en la que entra sistemáticamente el infinito.

El infinito-indeterminado sólo se halla de algún modo, según Aristóteles es (cf. *Physicos, III,* 4 ss,) en el orden de la causa material, y de la cantidad en cuanto accidente más propio de la materia, puesto que ésta es, por constitución, lo indeterminado, lo incognoscible en sí mismo.

En esto conserva Aristóteles la tradición helénica clásica, en que lo indeterminado servía nada más de punto de partida (arké).

2.16) En geometría se tomará por ente básico la *figura cerrada,* es decir: definida por el contorno; y se definirán los elementos básicos por sus límites característicos: *línea,* por puntos; *plano,* por líneas que lo delimiten; *cuerpo,* por superficies que lo circunden. El límite es el que permite en geometría clásica delimitar, y delimitar es definir. La geometría euclídea es geometría hecha implícitamente, pero eficazmente, bajo el postulado valoral de la finitud, definición, de limitación. Como he estudiado largamente en la *Introducción* a los *"Elementos de Geometría"* de Euclides (*Colección de Clásicos* de la U.N.A.M.), el postulado de las paralelas tiene en Euclides la forma contraria a la vulgarmente propalada. Es un postulado que sirve para determinar la finitud (punto de corte) de rectas que amenazan con no cerrarse, es decir: con ir hacia lo infinito-indefinido, por tanto getométricamente inaprovechables, para el griego. Además, desde el punto de vista moderno, la geometría clá-

sica griega es del tipo *métrico,* es decir: está construida sobre el concepto de *medida,* de comparación con una unidad finita, de extremos bien determinados. Nuevo indicio de la finitud característica de la geometría griega. Añádase: en la clasificación de los números predominan los pares, los (*ártion*) que quiere decir justo, exacto, determinado, frente a los impares que son denominados (*perissón*), sobrantes, periféricos, externos. No es preciso recordar que la aparición de números tan sencillos modernamente como la raíz cuadrada de 2, $\sqrt{2}$, desconcertó de tal modo al griego que los dominó, *irracionales (álogos);* Euclides, *(árretos),* indecibles, es decir: no expresables por un conjunto *finito* de signos y palabras. Por fin, para no acumular demasiados datos: los argumentos de Zenón están todos ellos guiados por el pánico inconsciente hacia la infinidad o indeterminación, por el rechazo natural al griego, de todo proceso que llevara al infinito, pues notaba tales procesos (dicotómicos) como llevándole a lo *indefinido.*

Podemos, pues, afirmar, que para el griego clásico, lo finito estaba positivamente valorado mientras que confundía en una valoración negativa de conjunto *indefinido* e *infinito.*

El que, pues, un ser no tuviera todo lo que todos los demás, no era considerado como imperfección, sino al revés; tener notas comprendidas entre un género próximo y una diferencia específica era la perfección ontológica y lógica. Dicho en otra forma: la privación se oponía al ser perfecto, pero la negación no se opone al ser. No por-

que el hombre no sea Júpiter es por esto sólo imperfecto el hombre; no porque Júpiter no mande en la *Anágque* o Necesidad, Júpiter es imperfecto.

El principio de contradicción, tal como lo entiende el griego clásico, sólo opone el ser a la nada y a la privación, no a la negación.

La finitud por una definición, aunque excluya necesariamente las demás diferencias específicas, no por eso incluye imperfección, sino al revés. La escolástica pensará todo lo contrario, como veremos inmediatamente.

SEGUNDO PERÍODO

VALORACION POSITIVA DE LO INFINITO; DESVALORACION CORRELATIVA DE LO FINITO. (ESCOLASTICA MEDIEVAL)

La escolástica llega a separar claramente infinito de indefinido. Y así atribuirá a Dios el atributo de infinidad. Santo Tomás, para referirme a lo clásico, y citando uno citar todos, demostrará en la *Suma teológica, P. I.,* cuestión VII, art. I, que Dios es *infinito*, rechazando la identificación entre *infinitum* y *imperfectum (omne infinitum est imperfectum)*, que es la primera objeción que a sí mismo se propone antes de comenzar esta cuestión. Tenemos, pues, datos: 1) que ser infinito, en cuanto distinto de lo indeterminado, no sólo no es imperfección, sino perfección, y tal que sólo conviene a Dios (art. II; *nihil praeter Deum potest esse infinitum simpliciter*).

Pero Santo Tomás tuvo que comenzar caracterizando positivamente la *infinidad*. Y lo hizo mediante las nociones de potencia y acto: todo acto no recibido en una potencia es, en un orden u otro, infinito; el acto de existir abarca todos los órdenes, conviene a todo ser; luego si el acto de existir no

está recibido, en nada ni de nadie, será *absolutamente* o simplemente infinito. Tal es en sustancia el argumento del artículo citado. Dios es la existencia subsistente (ni recibida *en* una potencia ni recibida *de* nadie), luego es absolutamente infinito. Notemos que los predicados finito e infinito quedan ya vinculados, y fue una de las radicales innovaciones de la escolástica, con entidades realmente distintas y con oficios positivos distintos: la potencia es principio propio de limitación, pluralidad, individuación; el acto es principio de infinidad, determinación, unidad. Santo Tomás tendrá que desvincular, consecuentemente, la identificación griega entre *definido* y *perfecto*. Dios no es definible por género próximo y diferencia específica: "*ex hoc patet quod (Deus) non habet genus neque differentiam neque est deffinitio ipsius*" (*Summa theologica,* part. I, cues. III, art. V.).

3) Quedan vinculados el concepto de *finito* con el de *creatura.* Bastará que una cosa sea finita en cualquier orden para que automáticamente tenga que depender de la causa eficiente suprema, o sea creatura. Entre los griegos las cosas naturalmente finitas y definidas, como los vivientes, tienen intrínseca la causa de su movimiento, es decir, la causa eficiente. De ahí que el motor primero no fuera causa universal, inmediata, directa, continua, si no cuando más necesaria para el comienzo del movimiento del universo, que no era en conjunto un ser *natural,* precisamente por la distinción de esferas de cosas corruptibles e incorruptibles (mundo sublunar y supralunar). El pri-

mer motor era solamente, en Aristóteles, *comienzo* simple del movimiento, no *principio* propio y continuo de él. Desde el momento en que la definición no salve la independencia de las cosas, la causa eficiente tendrá que intervenir en ellas. La potencia no pasará al acto sino por un ser en acto, y no por espontaneidad natural. La causa eficiente comenzará a intervenir en el orden esencial, en las relaciones entre potencia y acto, en las acciones de todas las cosas, es que la definición no cierra ya ningún ser perfectamente; lo definido, cuanto más lo esté, más imperfecto es, y más abierto.

Se ha roto, pues, la valoración helénica a favor de lo finito; el valor de ser supremo corresponde al infinito.

4) La infinidad no es en Dios ningún atributo particular, sino un modo de *todos* ellos. Es el *tono* en que todos están: la sabiduría tiene que ser infinita; la voluntad infinita; el poder infinito; la ciencia, infinita; la misericordia, infinita...; e infinito todo ello de grado *absoluto*; es decir, no simplemente infinito, sino infinitamente infinito, y no solamente infinitamente infinito sino infinitamente infinitamente infinito, y así en potencias de infinidad sin límite. Veremos, cuando se llegue a la época moderna, las antinomias que en la estructura misma de los conceptos llevados al *absolutamente infinito* se hallan.

5) Santo Tomás sostendrá además que es posible que un ser creado sea infinito en su orden o *secundum quid.* Bastará que carezca de materia para que, por el mero hecho, su forma sea infinita

en su orden. Así se sostendrá la célebre sentencia, no compartida ni mucho menos por todos los escolásticos, de que los espíritus puros, o ángeles en lenguaje teológico, son cada uno una especie íntegra, infinitos cada uno en su orden, incluyendo eminentemente lo que pudieran incluir infinitos individuos de una especie. Con que hay cosas que son infinitas y son determinadas por una especie, son cada una, una especie íntegra.

6) Pero la infinidad determinada no baja más según Santo Tomás. No puede haber ni números infinitos, ni cantidad infinita, ni sustancia material infinita alguna (*Sum. Theol.*, part. I, cuest. VII, art. III, IV); sólo en los seres sucesivos (como el tiempo) podrá discutirse si cabe un infinito. Y es que la materia primera y la cantidad, siempre que intervienen son principios de limitación, de pluralidad, de finidad imperfecta. Así que la distinción o separación entre infinito e indefinido no llega al orden físico ni al matemático (aritmético y geométrico). De ahí que no pudieran construir la matemática moderna, y sobre todo la operación, "paso al límite" que de ella procede o sobre la que se asienta. La repugnancia de un número infinito está fundamentada en Santo Tomás en el principio de que "*numerus est multitudo mensurata per unum*" (ibid, art. IV); *el número es multitud medida por la unidad*. Según esto nos hallamos en una concepción *métrica* de la aritmética, de la geometría, etc.; todos saben que es posible fundamentar, y más hondamente, la geometría en métodos proyectivos, en grupos topológicos, en los cuales ya no inter-

vienen para nada la unidad y la mensurabilidad; más aún, tal teoría haría imposible los números inconmensurables o los irracionales, radicalmente inconmensurables e incomparables entre sí, aparte de que podría objetarse toda la teoría cantoriana de los transfinitos.

Notemos nada más, y es lo que nos interesa: la infinidad absoluta queda positivamente valorada, y como lo más positivo; la infinidad determinada se halla en el orden de la existencia pura (Dios) y de la existencia recibida en esencia sin materia (espíritus puros); pero ya no puede descender más abajo. No cabe infinidad determinada en lo material. El progreso de la época siguiente consistirá en mostrar que también cabe en otros órdenes; de modo que la infinidad deja de ser atributo vinculado a la perfección del ser, pues puede hallarse en todos los órdenes. Comienza así la reversión hacia los griegos.

7) Santo Tomás conservará el principo griego de repugnancia al paso hacia infinito, "*repugnat processus in infinitum*" (Cf. *Summa theol.* pars I. q. II art. III; ibid. q. VII art. IV); con una sutil distinción que preparará el camino para la admisión moderna de la operación "*paso al límite*", a saber: repugna un proceso al infinito en causas o entre cosas esencialmente subordinadas, pero no repugna entre cosas accidentalmente subordinadas. Y es que en este segundo caso se trata más bien de un proceso *indeterminado* en cuanto al *número* (para clavar un clavo no está determinado *esencialmente* el número de martillos que habrá que

emplear; si se rompe uno, se sustituye por otro, y así indefinidamente; clavar un clavo puede, pues, implicar un proceso al infinito en el número de martillos, puesto que no determina *cuántos, ibid.*).

El no haber admitido el infinito determinado (por ejemplo bajo la estructura de una sucesión, serie, integral..., etc., como modernamente se sabe) dentro del orden cuantitativo, hace que no pueda admitir un *proceso al infinito,* hacia un infinito determinado. Ambas afirmaciones son conexas y caen simultáneamente o se sostienen simultáneamente también.

El famoso y mejor comentador de Santo Tomás, el cardenal Cayetano, escribió entre otros opúsculos inapreciables uno poco citado: *"De Dei gloriosi infinitate intensiva"*, sobre la *"infinidad intensiva de Dios"*, donde aparte de la razón ontológica básica de Santo Tomás, fundada en las relaciones de potencia y acto, intenta demostrar que la "virtud" o poder eficiente de Dios es infinito, con infinidad intensiva, cualitativa, mediante otros argumentos sacados del tipo de movimiento que, supone, produce Dios en el mundo. Cito un par de proposiciones suyas: *"Prima condicionalis est: si A per se primo movet tempore infinito, A est virtutis infinitae intensivae"*, *"si A mueve de suyo y primariamente durante un tiempo infinito, A tiene potencia intensiva infinita.* De movimento de duración infinita, a potencia infinita intensiva. No voy a entrometerme en cuestiones ajenas próximamente a este trabajo. Solamente recuerdo que tal principio de Cayetano va directamente contra el prin-

cipio de inercia, establecido por Galileo, sostenido por Newton y mantenido, aunque bajo formas más amplias por toda la física moderna. Para que un cuerpo se mueva indefinidamente, en línea recta (o geodésica), con movimiento continuo, uniforme, basta con que se le dé un primer empuje y se mueva en un plano horizontal, o en una línea natural del universo correspondiente. Es decir: moverse indefinidamente durante un tiempo infinito, continuamente, no requiere virtud o potencia infinita en el agente, ni acción continua suya.

Al revés: una fuerza *constante* en intensidad que obre continuamente sobre un móvil, acelera continuamente su movimiento, cosa ignorada de Aristóteles y la escolástica. De modo que si Dios estuviera continuamente moviendo el mundo con una fuerza constante, el movimiento del mundo iría creciendo continuamente, acelerándose, y no habría ley de inercia física.

"Secunda autem conditionalis est ista: si A movet tempore infinito unum motum continuum. A est movens inmobile". Si A mueve durante un tiempo infinito un movimiento continuo. A es motor "inmoble". Falso también, pues el movimiento continuo inercial, dura indefinidamente, y sin embargo puede proceder de un motor que dé un impulso instantáneo, y después pueda cambiar, puesto que no queda vinculado con el movimiento subsiguiente. Más aún; cuando el motor (o la fuerza) mueva un cuerpo durante tiempo infinito y continuamente, no tiene por qué cambiar la fuerza, puesto que una

fuerza *constante* puede, sin cambiarse, producir un movimiento continuamente acelerado.

Es decir: las infinidades de tiempo, movimiento, fuerza o potencia no tienen nada que ver entre sí. Una potencia *finita* puede producir un movimiento que dure *indefinidamente,* un movimiento de tipo inercial. A acto infinito, puede corresponder potencia activa finita. Y es que en toda la filosofía escolástica no se ha introducido aún, como tampoco en la moderna, la categoría de *explosión,* de inconmensurabilidad o desmesura entre estímulo y reacción, de causa ocasional, regular, estadística. Está regida la filosofía, casi sin excepción por una ampliación, hablando retrospectivamente, del principio newtoniano de acción y reacción. Pero de estas raíces de ciertos temas no voy a tratar aquí para no complicar indebidamente este trabajo.

Podemos, pues, concluir: desde el punto de vista de las relaciones entre lo finito y lo infinito, se caracteriza la época escolástica medieval por el predominio y valoración positiva de lo infinito, por la vinculación de lo infinito a la divinidad. Sólo Dios es *simpliciter infinitus, absolute infinitus;* los espíritus puros pueden ser infinitos *secundum quid,* en su orden; lo material es en todos los sentidos *finito en acto.*

Pero no desconozcamos que la desvinculación entre infinito e indefinido o indeterminado fue obra sobre todo de la escolástica, con lo cual se quitó uno de los obstáculos invencibles que desde los griegos se ponían a la invención del cálculo infinitesimal, y de su operación básica; el paso al límite.

TERCER PERÍODO

EQUILIBRIO VALORAL ENTRE FINITO E INFINITO

Este tercer período está dominado por la influencia de las matemáticas. Además, los inventos matemáticos no llegan a penetrar propiamente en los dominios filosóficos; la penetración se hará en el período siguiente, y aún no enteramente. No sirva, pues, de motivo de extrañeza el que nos refiramos ahora sobre todo a ciertas ideas matemáticas, más bien que clásicamente filosóficas, aunque por su universalidad programática todas las ideas y todas las categorías sobre seres pertenezcan a la filosofía.

1. 1) INVENCION DEL ALGEBRA

Con la invención y desarrollo del álgebra —por Descartes, Vieta—, se puso de manifiesto que para hacer matemáticas no es preciso tratarse explícitamente con números concretos, naturales, como 0, 1, 2, 3...; racionales, cual 1/2, 3/4, 5/9, etc., irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$;... sino que existe un conjunto de leyes o relaciones complejas que

valen aun cuando la fórmula se componga de constantes indeterminadas, de variables. Es decir: los números concretos pasan a segundo plano, saliendo al primero las relaciones puras, relaciones que no tienen por base números especiales y determinados, sino números cualesquiera. Lo cual nos viene a decir que el fundamento de la relación no interviene, en su singularidad, en la estructura y consistencia de la relación. Con posteriores términos de Cassirer: que en matemáticas predomina el concepto de *función* sobre el de *sustancia.* Pero saquemos una consecuencia más: con la introducción de constantes indeterminadas —a, b, c—, de variables —x, y, z—, se introduce un *indeterminado* especial en álgebra; la magnitud *a* puede ser sustituida por cualquier número concreto, lo mismo la b, c, d, y una variable como *x* puede recorrer un campo entero de valores y aun todos a veces. Pero resulta que con fundamento indeterminado, a pesar de la presencia sistemática de lo indeterminado, las relaciones no sólo no resultan cada vez más indeterminadas, sino, al revés, crecientemente determinadas y cada vez más explícitas. Es decir: están en razón inversa presencia de indeterminado numérico y presencia de relaciones en lo indeterminado; la indeterminación del fundamento no afecta a la indeterminación de las relaciones. Lo cual nos demuestra que las relaciones (funciones) matemáticas son en amplísimos límites independientes del fundamento cuantitativo. El álgebra no es sino la sistematización de leyes o funciones determinadísimas, que operan sobre indeterminados, siempre los mismos: a, b, c...

Así, aunque a, b, c..., sean las mismas constantes indeterminadas, son fórmulas esencialmente diversas: la del binomio de Newton y la serie hipergeométrica. Lo cual nos muestra palpablemente el predominio y la consistencia propia, en sí, de las relaciones matemáticas. Si circunstancias externas e internas, que no voy a estudiar aquí, hubieran ayudado a la escolástica tomista, hubiera podido descubrir todos estos puntos, ampliando su método de abstracción *formal,* no de abstracción *total* (Cf. Cayetano, *De Ente et Essentia, cuest. I*), pues hubiera podido descubrir que las relaciones, o algunas de ellas, tienen estructura de *formas,* cuya inteligibilidad crece con la abstracción formal. Cayetano dejó este punto en una primera indicación, desaprovechada.

Además: entre una fórmula algebraica y los casos concretos no hay relación de género a especie y de especie a individuo, como entre animal, hombre y Platón; sino de forma o molde a casos; rige una ley de sustitución, no de individuación o especificación intrínseca. Lo cual nos ha de recordar que si el individuo hace que la especie pueda ser real, y la especie hace que el género sea realmente posible, en las fórmulas algebraicas el caso concreto no hace posible la fórmula; y sería perfectamente posible, y es perfectamente desarrollable, el álgebra sin emplear ninguna sustitución. Toda sustitución es literalmente un *caso,* una caída a otro orden, al de los números concretos, cuyo estudio corresponde a otra rama de las matemáticas que se denomina *teoría de los números.*

Concluyamos: la presencia de la indeterminación y de lo indeterminado en el orden cuantitativo no impide, sino que, al revés, favorece la determinación relacional, y la presencia explícita de relaciones.

En adelante, el problema del dominio y de infinito se planteará en matemáticas dentro del dominio *relacional,* y no de cualesquiera relaciones, como las de padre-hijo, causa-efecto. . ., sino de relaciones pertenecientes, clásicamente, al dominio cuantitativo mismo, que, en su realidad, parece dejarse en estado de *indeterminación.*

I. 2) CONCEPTOS DE SUCESION Y SERIE

La sucesión de valores 0, 1, 2, 3, 4. . . está ciertamente *medida* por la unidad; un valor dista de otro siguiente en una unidad, o la diferencia de dos seguidos es la unidad. Pero es conocido por todos, que se pueden establecer sucesiones de números en que la razón de uno a otro no sea la unidad; sino un número cualquiera —entero, racional, irracional. . .—, dando lo que se conoce con el título general de series aritmética y geométrica, o hipergeométricas. . . Tales series están medidas por números que no son la unidad. Es claro que, según la definición clásica, semejantes multitudes medidas por una magnitud fija y que no es la unidad no serían números en el mismo sentido que los medidos directamente por la unidad.

Más aún: tales sucesiones y series (no vamos a entrar aquí en la distinción estricta entre serie

y sucesion, *Reihe, Folge*) están dadas por la ley o relaciones o función que engendran los miembros y rigen entre ellos.

Y así no interesa la sucesión explícita

$$1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5\ldots,$$

sino la ley general o función.

$$y = \frac{x}{x+1}$$

que la engendra y expresa la relación entre un miembro y el siguiente, y que permite ella sola estudiar la convergencia, etc.

Y no interesa ni tiene importancia la serie numérica explícita y especial

$$1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + .$$

sino la fórmula general

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \\ = \frac{1}{1 - q}; \text{ para} -1 < q < 1$$

es decir, para cualquiera fracción comprendida entre menos 1 y más 1.

De nuevo nos hallamos con que una infinidad de términos, construíbles siempre y cuando y cuantos queramos, está dada por una relación bien determinada, y de modo que a la *infinidad* de los casos, aun dejados sin determinar, corresponde una relación bien determinada y finitamente señalable.

La finitud y aun la definición de una relación (o sistema de relaciones), no depende de la definición o explicación de los términos. De nuevo: habrá que estudiar el infinito desde el punto de vista de la relación, no de las cosas u objetos.

La infinidad no es sin más algo *absoluto,* una propiedad de los seres, sino que, en general, habrá infinidades que pertenezcan al orden de la relación pura sin que vayan paralelas determinación y definición de la relación, y definición y determinación del fundamento. Infinidad es en principio, independiente de ser en sí; y será cuestión de ontología regional, no de ontología general —como se creía antiguamente—, ver si hay algún tipo de infinidad que vaya paralelo con el ser, de modo que determinación de ser se corresponda con determinación de infinidad. Dicho brevemente: es falso tomado en toda su generalidad que infinidad sea predicado absoluto; y que dependa, en su tipo de relación, del fundamento.

I. 3) CRITERIO DE CONVERGENCIA

Cuando el griego clásico se encontró ante casos que conducían a un número infinito de términos, o bien se desconcertó o bien echó por un camino que evitara la dificultad teórica. Por ejemplo: el proceso de dicotomía, o repetición indefinida de la división por 2, característico del griego clásico y tan empleado por Zenón, puede dar un límite finito y bien determinado. La serie

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/2n.$$

tiene por límite la unidad, como es bien sabido. Zenón no supo ver la convergencia de tal proceso dicotómico; y fue una, no la única ciertamente, raíz de su *aporía.*

El griego no supo dividir una magnitud en infinitas partes sino por el proceso dicotómico (mitad, mitad de mitad, mitad de mitad de mitad...), cuando éste es solamente un caso entre infinitas otras leyes de división de un intervalo.

Arquímedes, infinitamente más matemático que Zenón, empleó para eludir la dificultad de sumas de términos infinitamente pequeños en número infinito, es decir: para evitar la integración, dicho con términos posteriores, el procedimiento de una doble reducción *ab absurdum,* del tipo: *a* no puede ser mayor que *b, a* tampoco puede ser menor que *b,* luego *a* y *b* son iguales. He estudiado largamente este procedimiento en mi artículo: "La posición histórica de Leibniz en la fundamentación filosófica y científica del cálculo infinitesimal" en el número 23 de la Revista de *Filosofía y Letras* (año 1946). En el fondo, todas estas dificultades dependían del predominio de la sustancia, de lo definido en sí, sobre la relación y, de consiguiente, de la idea preconcebida de que la relación no podía tener inteligibilidad propia, superior e independiente a la del fundamento, y que menos aún podía tener consistencia propia. De ahí que finito e infinito fueran considerados primariamente como atributos de cosas en sí, sobre todo de sustancias, y de accidentes *de* sustancias.

La identificación entre infinito e indeterminado cae por su base con los criterios de convergencia (de sucesiones y series), como los de Cauchy, Abel, Raabe... Una sucesión de infinitos términos, cuantos queramos determinar según la ley o función definidora, *define* y determina, cuando se cumplen ciertos criterios matemáticos bien determinados, un límite, es decir: se define y delimita a sí misma. Tal límite podrá o no pertenecer a la sucesión o a la serie, pero de todos modos queda *delimitada* (definida). Un *proceso al infinito*, contra la filosofía clásica griega y escolástica, define algo muy determinado, en ciertas circunstancias, no accidentales sino regidas por criterios. No sólo, pues no repugna un proceso al infinito, sino que se dan procesos al infinito que definen perfectamente cosas que con el método finito ordinario quedarían indeterminadas, o no serían reconocidas en su determinación. Por ejemplo: todos los números reales, en cuanto tales, son, por constitución, infinidad de términos, regidos por una ley, y que definen un límite. El vulgarísimo número $\sqrt{2}$, primer *álogos* y *árretos,* irracional e indecible, que se presentó a los griegos, está definido por dos sucesiones de números racionales; una creciente y otra decreciente, respecto de las cuales $\sqrt{2}$ es límite, que no les pertenece, pero las *delimita.*

Cuando el límite no pertenece a la sucesión o serie que hacia él converge, constituye, por decirlo, un poco atécnicamente, un elemento de otro orden: un número irracional, uno trascendente...

No repugna, pues, un proceso al infinito; si repugna en algún orden será por razón de ser tal orden, es decir: el principio *repugna un proceso al infinito* es un principio regional, no de ontología general.

El infinito *determina;* el infinito *define;* en matemáticas hallamos casos continuos de ello, y el estudio de infinitos (sucesiones, series...) que *definen* constituye, dicho en términos filosóficos, la esencia de la matemática moderna.

I. 4) Más aún: ya la escolástica distinguía entre multitud trascendental y multitud cuantitativa. Y así decía Santo Tomás: *Multitude quae ponit aliquid in creatis est species quantitatis quae non transumitur in divinam praedicationen, sed tantum multitudo trascendens quae non addit supra ea de quibus nisi indivisionem circa singula. Et talis multitudo decitur de Deo.* (Summa theol, part. I q. XXX art. III. ad. 2; cf. ibid. corpus art., q. XI art. III ad. 2). "*La multitud cuantitativa pone o trae consigo algo nuevo en las cosas creadas, y tal multitud no se dice de Dios* (está hablando Santo Tomás, de si a la Trinidad de personas divinas se puede aplicar, y en qué sentido, el término numeral «tres»), *pero la multitud trascendental no añade sobre las cosas numeradas, sino únicamente expresa la indivisión de cada una respecto de las demás; y tal clase de multitud se dice de Dios*".

Pues bien; la teoría de los conjuntos (*Menge, ensemble, set*) está construida sobre el concepto de multitud trascendental o metafísica, en lenguaje es-

colástico, y no versa primariamente, sino como sobre ejemplo particular, de multitudes *cuantitativas.*

Hausdorf en su clásica obra *Mengenlehre* (tercera edición, p. II) define un conjunto diciendo: *"Eine Menge ist eine Vielheit als Einheit gedacht"*, un *"conjunto no es sino una pluralidad concebida como unidad";* o bien, como dice unas líneas antes: *"un conjunto surge por reunión de cosas singulares en un todo".* Y las dificultades que todos los tratadistas encuentran en definir el concepto de "conjunto" tan ampliamente que abarque todos los casos, sin restringirse demasiado, muestran que se trata de multitud trascendental, unificada por un tipo de unidad no necesariamente cuantitativo. Cántor, el fundador de la teoría de los conjuntos, había dado por definición de conjunto: *"eine Menge ist eine Zusammenfass ung bestimmter wohlunterschiedener Objektke unserer Anschuung oder unseres Denkekns —welcke die Elemente der Menge gennant werdenzu einem"* (*Beitrage zur Bergründung der transfiniten Mengenlehre. I. Mathem, Ann. bd. 46, p. 481;* véase la traducción inglesa *Contribution to the founding of the theory of transfinite numbers., 1941, p. 85*), *"conjunto es una reunión de objetos determinados y distinguibles de nuestra intuición o de nuestro pensamiento —que se llamarán elementos del conjunto—, en un todo".* No se fija ni el tipo de elementos, ni el tipo de unificación, reunión o resumen (*Inbegriff*), en un todo, ni se delimita el tipo de todo (real, de razón; sensible, inteligible...). Es decir: nos hallamos ante una teoría de la unidad (bien distinguible,

divisum ab alio, y de determinada en sí, *indivisum in se*), y de la multitud trascendental, en sentido clásico de esta palabra, no en el kantiano.

Por esto, las alusiones que haremos a la filosofía desde el punto de vista de la teoría de los conjuntos, no son matemáticas sino metafísicas. Dejemos, pues, asentados que la teoría de los conjuntos pertenece a la ontología general, aunque ocasionalmente hayan sido matemáticos los que la hayan desarrollado, y lo hayan hecho sobre todo en vistas a los entes estrictamente matemáticos.

En la noción de *conjunto* no interviene para nada la unidad cuantitativa, la medición por la unidad, la homogeneidad cuantitativa, etc. Y veremos en el período siguiente que, siguiendo la dirección de esta teoría, se hablará del conjunto de todos los predicados posibles, el conjunto de todos los conceptos abstractos, etc.... Sólo, pues, en la cuarta época se hará aplicación de esta teoría a temas filosóficos, aunque no parece que la mayoría de los filósofos, fuera de raras y honrosas excepciones, se haya percatado de lo que está ocurriendo.

Pues bien: la teoría de los conjuntos nos permite afirmar entre otras cosas que no caben buenamente en este trabajo esquemático, las siguientes: 1.41) no se puede identificar, ni siquiera en el orden cuantitativo infinidad cuantitativa con indeterminación; se dan diversos tipos de infinidad o transfinitud cuantitativa, como la de los conjuntos enumerables y no enumerables, uno de los pri-

meros resultados de la teoría de Cántor. No voy a dedicarme a su interpretación, ni siquiera para evitar ciertos malentendidos que pudieran surgir en los no técnicos en estas materias; digo solamente que los números transfinitos cantorianos son más bien *maneras transfinitas de contar* que números infinitos, en el sentido corriente de la palabra, o en las pretensiones que la mentalidad corriente daría a la palabra "número infinito". Con el tipo de contar que se halla corrientemente aplicado en los números naturales (0, 1, 2, 3...), se pueden contar todos los números racionales (quebrados, aunque a primera vista parezcan ser muchísimos más los números fraccionarios que los enteros); y con ese mismo tipo de contar se pueden contar los números algebraicos; pero ya no basta para contar los números trascendentales, el continuo, el conjunto de todos los conjuntos parciales del continuo (o conjuntos de todos los números reales), etc. Así las teorías clásicas de los conjuntos señalan tres tipos de *potencias infinitas; aleph cero* es la primera y más elemental. Con ella se pueden contar perfectamente todos los números enteros, todos los números racionales, todos los números algebraicos. Es como un entramado o trama relacional que los abarca a todos. Pero no por eso tiene sentido el que haya, por ejemplo, un número entero mayor que todos los números enteros, o un número racional menor que todos los números racionales. De nuevo la indeterminación, incluida en el concepto clásico de infinito, se ha refugiado en el material; pero ha quedado desligado, en forma de relación (tipo de contar), lo que de infinidad de-

terminada había en el número natural. Y de manera semejante, en el conjunto se tenía la intuición o preconcepto de que había una infinidad de puntos, si no en acto y señalables, cuando menos en potencia; y así la escolástica, al estudiar la composición del continuo, dirá que en el conjunto hay partes extensas indefinidamente divisibles, infinitas en potencia, unidas por indivisibles, que están en acto sólo en número finito, no en número infinito. He tratado largamente este punto en mi artículo citado (pp. 16-21).

Pues bien: la teoría de los conjuntos ha logrado designar en el continuo no partes indefinidamente divisibles (extensas) y un número finito de indivisibles (continuantes, terminantes), sino un sistema de relaciones capaz de *contar* cuantas partes señalamos, queramos señalar, o nos den señaladas, o *nos pidan* que señalemos. Y este recuento o *enumeración* no es medición, ni comparación con la unidad, es decir: no es propiamente cuantitativo (*unitas mensurans, numerus numerans*), (*árithmós oi arithmoúmen*), Aristóteles, Cf. *Physik,* IV, cap. II), sino nudo especial de relaciones desligadas por una operación relacional que se denomina *coordinación biunívoca.*

Cada transfinito, definido a lo Cántor, es cual forma relacional infinita subsistente, obtenible por abstracción formal. La capacidad de un molde no depende de que de hecho esté o no lleno, ni siquiera de que haya o no material para llenarlo, sino de sus dimensiones. Así un número transfinito es molde o entramado relacional capaz de contar cuan-

tos números enteros haya, hayamos construido, se nos pida que construyamos o nos den construidos y numerados ya.

Pero aun así la infinidad del número en sí mismo, si se permite la frase, no es tampoco algo totalmente indeterminado: no hay ciertamente un número entero infinitamente grande, tan grande que repugne otro mayor, pues en tal caso ya no sería posible añadirle una unidad; pero se dan procedimientos bien *determinados,* no vagos, para hacer números tan grandes cuanto queramos o nos pidan. Por ejemplo, el viejo teorema de Euclides para demostrar que en la sucesión de los números enteros hay infinitos números primos. Y es posible estudiar la distribución de los números primos a lo largo de la sucesión entera total, es decir: la estructura interna de tal infinito, en potencia, respecto de la determinación en acto de sus miembros ulteriores, en acto en cuanto que tenemos el poder y el medio sistemático y funcional, de construirle cuantos miembros queramos.

Se parece este punto a un Estado tan rico que pudiera acuñar en cada momento toda la moneda que quisiera, aunque poseyera por lo pronto el oro en forma informe de lingotes; así el número entero nos está dado en forma de bloque indistinto, pero podemos fabricar cuantos números queramos, bien determinados, tan grandes como deseemos o se nos pida o necesitemos.

De manera semejante: del continuo podemos desprender, mediante el teorema de la diagonal de

Cántor, otro entramado relacional numerante o contante de potencia de numerar superior a la potencia de numerar de los números enteros: el segundo transfinito. El teorema de Liouville nos permitirá construir números trascendentes bien determinados, cuya existencia está asegurada por el procedimiento demostrativo de la diagonal de Cántor.

Podemos, pues, afirmar que en la teoría de los conjuntos se separa determinadamente infinidad de indeterminación; la determinación queda fijada en un entramado relacional, perfectamente definido y definible, y que a pesar de esta definición suya no es finito, pues es capaz de contar cuantos números queramos de un orden fijo; a su vez, la indeterminación no queda tampoco confinada en los elementos de contar, pues se dan procedimientos para construir cuantos se quiera, sin límite superior.

Tiene, pues, perfecto sentido preguntarse: ¿el número de los conceptos es enumerable (transfinito de primer orden) o no enumerable? ¿El número de perfecciones divinas, con que transfinito cantoriano se puede contar?, puesto que es preciso recordar que estos procedimientos no presuponen nada cuantitativo, sino únicamente, según la definición de Cántor, elementos determinados y distinguibles, por razón o por los sentidos. Es decir: basta una distinción virtual, sin que sea necesaria una real.

De estas cuestiones trataremos brevemente en la parte cuarta de este trabajo.

1.42) Pero, en la teoría de Cántor se halla aún otro punto más interesante: el de los *transfi-*

nitos ordinales. Además de los tipos de contar, los tipos de ordenar, pues permiten ordenar conjuntos de cualquier número de elementos.

El *orden* no incluye de suyo nada cuantitativo. Más aún, sin entrar en detalles técnicos, es bien sabido que no coinciden los transfinitos ordinales con los cardinales; y una de las cuestiones más debatidas consiste, en nuestros días, en señalar qué transfinito ordinal es propio del número cardinal del continuo.

De nuevo los tipos de orden poseen una infinidad bien determinada.

No voy a entrar en detalles acerca de los tipos de infinitamente pequeños; investigaciones de Du Bois Raymond, Veronese, etc. Basta todo lo dicho para poder sacar la consecuencia que intento: *en el orden cuantitativo no coinciden cuantitativo y esencialmente finito; pueden darse tipos de infinidad bien determinada en el orden cuantitativo mismo. Lo infinito se halla en tal orden, y la infinidad determinada no se confina al orden del Absoluto y al de los espíritus. (Primera afirmación).*

Segunda afirmación: la multitud trascendental puede ser tratada con transfinitos, perfectamente determinados, tanto ordinales como cardinales; la indeterminación que en un orden pueda quedar no es total, materia pura o cantidad pura, sino determinable sin límite; en el orden de la multitud la determinabilidad es infinita, en el sentido de que se dan procedimientos bien determinados, de po-

tencia o poder tales que pueden construir cuantos elementos determinados se quiera y cuan grandes sea menester.

Los órdenes de infinidad relativa que Santo Tomás establecía entre los espíritus puros, cada uno es una especie íntegra, todos ellos distintos específicamente al menos entre sí, se hallan proporcionalmente en lo material mismo, en el continuo, numérico o geométrico. Si además es posible o no en la materia física, no nos interesa por ahora, pero cuando menos no repugna matemáticamente.

Tercera afirmación: Basta admitir en un ser distinción virtual interna —sin llegar a real—, para que los procedimientos de recuento y de ordenación de la teoría de los conjuntos y números transfinitos tengan, en principio, aplicación, pues se trata en ellas de multitud trascendental, no de necesariamente cuantitativa.

Podemos de consiguiente, afirmar que en este tercer período de las relaciones entre finito e infinito, se da una especie de equiparación de valor entre ellos, en el sentido de que la infinidad determinada puede hallarse en *todos los órdenes,* dejando de ser exclusiva de alguno (escolástica medieval), o imposible en todos (griegos).

Cuarto Período

PREDOMINIO DE LO FINITO CON IMPOSIBILIDAD DE LO INFINITO ABSOLUTO

Desarrollando el plan esquemático que nos hemos propuesto, enumero en forma de datos escuetos y como más característicos los siguientes:

I. 1) ANTINOMIAS DE LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS

Recordemos, ante todo —punto en que he insistido anteriormente—, que la teoría moderna de los conjuntos versa sobre la *multitud trascendental* (en sentido escolástico del término), y no propia ni exclusivamente sobre la cuantitativa. Por tanto, tales consideraciones caen enteramente dentro de la ontología general, aunque ocasionalmente hayan sido matemáticos y lógicos los que las hayan entrado.

La teoría de los conjuntos, al intentar llevar ciertos conceptos al límite *absoluto,* tropezó con lo que modernamente suele llamarse *antinomias.* Traigo las que pueden interesar más en los momentos presentes: c) Respecto de todo conjunto puede

plantearse el dilema lógico: o se incluye a sí mismo como elemento, o no se incluye a sí mismo como elemento. Ejemplo del primer caso es el conjunto de todos los conceptos abstractos, que es él mismo un concepto abstracto; en cambio, son casos del tipo contrario el conjunto de todos los libros, que es la biblioteca, y la biblioteca no es un libro ni del tipo libro; el conjunto de todas las cosas concretas no es un concreto, sino un abstracto, cuando tal conjunto se verifica o hace por una operación racional (concepto universal, trascendente, idea...). Es decir: no siempre todo conjunto se incluye a sí mismo como elemento, no siempre es autorreflexivo.

Formemos ahora *"el conjunto de todos los conjuntos que no se incluyan a sí mismo como elementos";* (vgr. biblioteca, casa, ciudad...); preguntamos: ¿Tal conjunto, que designaremos con M, se incluye a sí mismo como elemento?; tiene que incluirse a sí mismo como elemento, pues lo hemos formado precisamente con todos los conjuntos que no se incluyen a sí mismo como elementos (primera contradicción); pero si suponemos que el conjunto M se incluye a sí mismo como elemento, nos contradecimos inmediatamente, pues el conjunto M está formado, según definición por todos los conjuntos que no se incluyen a sí mismos como elementos.

De modo que al conjunto M no se puede aplicar la disyuntiva: incluirse o no incluirse a sí mismo como elemento, sin caer en ambos casos en contradicción. Ahora bien; puesto que, como advierte Fränkel (*Einleitung in die Megenlehre,* p. 211),

en la definición de M no entran sino el concepto de *conjunto,* y el principio de *disyunción,* hemos de concluir que en el concepto de conjunto (multitud trascendental unificada de cualquier manera), se encierra una contradicción, o bien que el principio de disyunción no tiene validez universal. Tal es la famosa paradoja de *Russell. (The principles of mathematics, 1903).*

b) Otra de las antinomias descubiertas por Russell y que como advierte Fränkel (p. 213), parece que no tiene que ver directamente nada con las matemáticas estrictas, es la siguiente: un concepto se denomina *predicable cuando puede* ser predicado de sí mismo. Por ejemplo, el concepto de *abstracto* es, pues, predicable. Cuando un concepto no puede ser predicado de sí mismo se denomina impredicable. Así el concepto de concreto no es concreto, sino abstracto, como todo concepto; es, por tanto, impredicable. Predicable e impredicable, son, por consiguiente, conceptos que se excluyen contradictoriamente.

Preguntemos ahora: ¿el concepto de *impredicable* es predicable o impredicable? Si el concepto de impredicable es predicable, caemos en una contradicción inmediata pero si suponemos —como no hay más remedio que hacerlo, en virtud del principio de disyunción y de falsedad del primer miembro de la disyunción—, que el concepto de impredicable es impredicable, caemos en la contradicción de estar predicando de impredicable, es decir: haberlo hecho predicable.

El concepto de *impredicable,* al igual que el concepto general de *conjunto,* tomados en todas sus generalidades, es decir: al pretender aplicarlos en universalidad absoluta, para que den un Todo, llevan a contradicciones.

La teoría de los conjuntos no ha tenido o no ha hallado más remedio para evitar semejantes contradicciones que implantar lo que se ha denominado *limitación a formaciones de conceptos "no predicativos"*, es decir: exclusión de todo tipo de predicación reflexiva, o con una frase clásica: evitar el *círculo vicioso,* no sólo en las *demostraciones,* sino en las *definiciones.* Al definir algo por sí mismo, no sólo no se define nada, como dijeron los clásicos en lógica, sino aún más; se cae en contradicciones. Ya Poincaré establece como ley básica: *ningún conjunto puede incluir miembros que tengan que ser definidos mediante tal conjunto.*

Los métodos concretos, y su necesidad, que los lógicos y matemáticos modernos han excogitado para evitar tales antinomias y poder construir sin contradicción la lógica y las matemáticas, no pertenecen a este trabajo. Me refiero sobre todo a la teoría de los tipos de Russell, a los intentos de Ramsey, etc.

c) Burali Forti encontró también antinomias especiales dentro de la teoría de los números transfinitos ordinales. El conjunto de *todos* los números ordinales, es decir: el ordinal finito *absolutamente,* lleva a contradicciones internas. Lo mismo, hay contradicción interna en el concepto de *"conjunto*

bien ordenado de "todos" los números ordinales"; y parecidamente es contradictorio el concepto o formación del conjunto de *"todos" los números cardinales.*

Teóricos de la teoría de los conjuntos, como Fränkel, hacen notar que este tipo general de contradicciones se emparenta históricamente con el que Kant descubrió en la *Crítica de razón pura,* cuando se toma una *Idea* como realizada ya, es decir: se hace que el valor regulativo de las ideas pase a ser valor constitutivo (ibid. pp. 212-213).

Podríamos, pues, concluir, de todo lo anterior que, según la matemática moderna, infinitos *determinados* pueden hallarse en órdenes especiales de objetos, inclusive de objetos cuantitativos; pero que no se puede formar ni el concepto de *infinito "absoluto" cardinal* ni el de *infinito "absoluto" ordinal,* y menos aun conceptos de infinitos más elevados, como el conjunto de *todos* los conjuntos, el conjunto de *todos* los conceptos. Es decir: *a fortiori* el concepto de *Todo absoluto* es intrínsecamente contradictorio. Y recordemos para la problemática estrictamente filosófica, que en el concepto de *conjunto* entran nada más conceptos trascendentales, no cuantitativos.

Si todo esto fuera verdad, y recuérdese que hacemos historia, no crítica, y menos decisión, habría que concluir que repugna un infinito *absolutamente* tal, que son posibles infinitos en ciertos órdenes delimitados, infinitos bien definidos.

d) Pero la dirección intuicionista de las matemáticas, representada por Brouwer, Heyting, Weyl..., sostiene que lo infinito repugna en todos los órdenes, e intenta construir las matemáticas en plan finitista.

Esta dirección extrema, cuyas inmensas dificultades no son para tratar en este momento, señalaría el punto a que habría llegado el problema histórico de las relaciones entre finito e infinito. Ya no tiene valor ni lógico, ni conceptual, ni científico, ni matemático sino lo finito. Pero aunque no lleguemos a este extremo, la lógica y matemáticas no intuicionistas han llegado a otro término, bien opuesto al medieval: el infinito *absoluto* repugna. Sólo son posibles o no contradictorios un infinito relativo, y lo finito.

No es preciso que recuerde el parentesco de estas doctrinas con las aserciones kantianas referentes a las antinomias a que se prestan peligrosamente las ideas; y en general las categorías cuando se las saca de los límites de la experiencia. Pero no he querido complicar datos con teorías; y, a lo mejor o a lo peor, debilitar datos con teorías.

Dentro de la filosofía contemporánea se han producido, entre otros sucesos, menos importantes o desconocidos para mí, dos con los que voy a terminar este trabajo:

a) *Teoría de Hartmann y Becker*

Becker, en sus trabajos *"Zur Logik der Moda-*

litaeten" (Jahrbuchfür Philosophie, Vol. XI, 1930) y *"Mathematische Existenz"* (ibid. Vol. VIII, 1927) ha reducido los 24 tipos de modalidades a 10 irreductibles; Lewis a 6.

Indico de este punto lo que nos interesa para el asunto presente. ¿Es la misma modalidad, necesario que necesariamente necesario; y ésta es lo mismo que necesariamente necesariamente necesario, etc.? Es decir: ¿hay o no hay potencias ascendentes al infinito dentro de la modalidad necesidad? De manera semejante: ¿es lo mismo realmente necesario que simplemente necesario; es lo mismo posible que posiblemente posible, que necesariamente posible, que posiblemente necesariamente posible...; y en general las potencias ascendentes de los modos de ser: posible, real necesario, son como la unidad, de modo que siempre queden iguales a la base? Sabemos, por la aritmética corriente, que 1 es igual a 1^2 a 1^3... a 1...

La cuestión no es tan sencilla de resolver. Ya la filosofía clásica distinguió diversos tipos de necesidad: necesario con necesidad física, necesario con necesidad matemática, necesario con necesidad metafísica; y admitía que lo necesario con necesidad matemática y metafísica ni Dios tenía poder para alterarlo; mientras que las alteraciones de lo necesario con necesidad física solamente, se denominaban milagros. No añadamos que, según las investigaciones modernas de ontología, habría que contar además, como con modalidad nueva, con la probabilidad, sobre todo dentro de lo físico y del cálculo de probabilidades.

Preguntémonos, pues: ¿se da una serie de potencias ascendentes hacia el infinito en los modos de necesidad, contingencia, posibilidad, probabilidad, realidad, imposibilidad, etc.?

Con la frase *absolutamente necesario* parece que pretendemos indicar no una necesidad cualquiera, sino una potencia de necesidad de exponente, si se tolera el lenguaje matemático, infinito. Y con la frase realmente real, o real de verdad, o en realidad de verdad, parece que indicamos un cierto tipo de realidad reforzado, en una cierta potencia, en su realidad, sin llegar a necesidad. Y al hablar que la probabilidad puede ir creciendo hasta aproximarse (o llegar) a certeza o necesidad, parece que indicamos que el modo probabilidad admite potencias, que no son simplemente igual a la base, cual las potencias de la unidad, sino que aumentan de valor, como las potencias de bases mayores que la unidad.

No voy a entrar, es claro, a decidir esta cuestión, ni siquiera a referir los intentos de solventarla. Recuerdo dos puntos solamente: 1) suele admitirse en el cálculo de modalidades que el modo necesidad se parece a la unidad, quiero decir: que las potencias ascendentes de necesidad —necesario, necesariamente necesario, necesariamente necesariamente necesario...—, equivalen pura y simplemente a necesario. Igualmente: las potencias ascendentes de posibilidad equivalen a la primera potencia: posible, posiblemente posible, posiblemente posiblemente posible,...—, equivalen simplemente a posible. Para otros modos las leyes propuestas

de reducción son mucho más complicadas, y habríamos de entrar en la lógica intuicionista. De este punto he tratado con una cierta extensión en mi obra: *Introducción a la lógica moderna.*

Los simples lógicos, como Lewis, Brouwer, Heyting, Becker... han cortado el nudo. No hay potencias de modalidades. Mas tal reducción se hace por axiomas, es decir: por postulados. Así que no admitirlos no implica sin más *contradicción,* aunque sí pudiera implicar *complicación.*

Los metafísicos, o no han tratado de este punto —que es en general lo que ha sucedido en tratados viejos y modernos—, o lo han enfocado desde otro punto de vista.

Como ejemplo me refiero a Hartmann (en "*Moeglichkeit und Wirlichkeit*", 1948, sobre todo pp. 90-95); según él las potencias ascendentes de necesidad terminan en realidad simple o en casualidad. Necesidad, necesidad de necesidad (necesariamente necesario), necesidad de necesidad de necesidad (necesariamente necesariamente necesario), etc., llevan a un proceso no sólo *infinito,* sino *indefinido,* pues el límite sería necesidad (o necesario) *absoluta*, es decir: no sometido a ninguna condición restrictiva. Por tanto, no podemos detenernos jamás, a no ser que supongamos lo que es precisamente cuestión: a saber, que necesario es, ya de por sí, y en primera potencia, todas las potencias siguientes; o que no tiene sentido nuevo ninguna potencia superior. Pero si no comenzamos por suponer que las potencias ascendentes de nece-

sidad equivalgan entre sí, detenernos en una es quedarnos en una necesidad *de hecho,* más o menos elevado, es decir: en una necesidad que es *simplemente real.* Por ejemplo, si determinamos que necesariamente necesario es la potencia suprema de necesidad, diferente de necesario, pero equivalente ya a necesariamente necesariamente necesario, y a las siguientes, habremos de decir que lo *absolutamente* necesario es necesariamente necesario y *nada más.* Nos quedamos *de hecho* aquí, ¿por qué? Pero si no queremos detenernos en ninguna potencia habremos de admitir que lo necesario es potenciable no sólo cuantas veces puedan dar los números finitos, sino los transfinitos y los transfinitos todos, cardinal y ordinal, y caeremos en las antinomias lógicas anteriormente descritas.

Hartmann no echa por el camino lógico o de la teoría de los conjuntos, sino que afirma simplemente que coinciden ser absolutamente necesario y ser absolutamente casual (*absolut notwendiges und absolut zufaellides wesen*). Y como Hartmann no es hombre que tenga miedo a las consecuencias, y a llamar a las cosas por sus nombres, dirá en la página 94: *"Gott als absolut notwendiges Wesen ist vielmehr das absolut zufaeliges Wesen",* que Dios *precisamente en cuanto ser absolutamente necesario es el ser absolutamente casual.*

Hartmann apoyará su demostración en las relaciones intermodales entre los modos básicos, y en el comportamiento de los modos en los límites de la esfera correspondiente.

Creo que con lo dicho basta para ver por dónde van las investigaciones modernas en estos puntos decisivos de la ontología general.

b) *Teoría de Heidegger*

La obra de Heidegger: *Kant und das Problema der Metaphysik* (19-29), y que no es sino una parte de la segunda de *Ser y Tiempo,* no aparecida en su integridad, aunque sí prometida, y según refieren redactada ya hace muchos años, está dedicada a una interpretación de la *Crítica de la razón pura,* no en cuanto teoría del conocimiento, sino en cuanto fundamento de la metafísica, humanamente posible, está anclada en la *finitud.* De modo que a la fórmula clásicamente kantiana: *la metafísica no es posible sino dentro de los límites de la experiencia,* Heidegger hace corresponder la de *la metafísica no es posible sino a base y por la finitud.* (Cfr., entre otros lugares, pp. 19, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 34, 40, 47, 52, 53, 54, 65, 66, 67, etc., 204, hasta el final, 236).

Con esto habríamos llegado, aunque por largos caminos, a una posición semejante a la griega: *predominio de lo finito.* Y si se añade la dirección intuicionista o finitista en matemáticas, en física moderna, el predominio en física de modo *probabilidad,* con un límite superior finito infranqueable que la impide llegar a la necesidad, tal vez no andaríamos exagerados al decir que el ambiente moderno, en todos los tipos de pensamiento filosófico o no, está por la *finitud* no sólo de *hecho.*

o por un imperativo vital inconsciente como los griegos, sino por *imposibilidad científica y filosófica,* el *infinito absoluto.*

Cuando más, se podrían admitir ciertos órdenes de infinidad, delimitados convenientemente.

INDICE